

Вариант ФМШ2016-III-11-1

- Решите систему:
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y \geq 1 \end{cases}$$
- Что такое распределительный закон? Справедлив ли он для:
 - операции сложения относительно операции умножения?
 - операции возведения в степень относительно операции умножения? Ответы обоснуйте.
- На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:
$$\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} \leq 1$$
- В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность с центром в точке O . BE – высота равнобедренного треугольника. Отрезок KL проходит через центр окружности, при этом $KL \parallel AC$. Чему может быть равно KB , если $KO = 6$, $BE = 15$? (Автор задачи: Даниил Ткачев, 10 класс, Москва)
- Найдите все значения a , при которых график функции $y = x + \frac{1}{a+1}$ не имеет общих точек с графиком функции $y = ax^2 - \frac{x}{a-1} + 1$.
- Вычислите сумму: $5 + 55 + 555 + 5555 + \dots + \underbrace{5\dots555}_{k \text{ пятёрок}}$
- Функция f определена для всех пар натуральных чисел (k, n) таких, что $k < n$:

$$f(k, n) = k^2 + k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1)^2 + (k+1) \cdot (k+2) + 2 \cdot (k+2)^2 + (k+2) \cdot (k+3) + 2 \cdot (k+3)^2 + \dots + 2 \cdot (n-3)^2 + (n-3) \cdot (n-2) + 2 \cdot (n-2)^2 + (n-2) \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-1)^2 + (n-1) \cdot n + n^2$$
 - вычислите: $\frac{f(3n, 7n)}{n^3}$;
 - решите уравнение: $f(5, x) = 125$;
 - существуют ли такие пары (k, n) , что $f(k, n)$ является квадратом натурального числа?

Вариант ФМШ2016-III-11-2

- Решите систему:
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \sin^2 x + 3 \cos^2 y \leq 1 \end{cases}$$
- Что такое распределительный закон? Справедлив ли он для:
 - операции умножения относительно операции разности?
 - операции возведения в степень относительно операции сложения? Ответы обоснуйте.
- На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:
$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} \leq 1$$
- В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность с центром в точке O . BE – высота равнобедренного треугольника. Отрезок KL проходит через центр окружности, при этом $KL \parallel AC$. Чему может быть равно KB , если $KO = 5$, $BE = 20$? (Автор задачи: Даниил Ткачев, 10 класс, Москва)
- Найдите все значения a , при которых график функции $y = -x + \frac{1}{a+1}$ не имеет общих точек с графиком функции $y = ax^2 + \frac{x}{a-1} + 1$.
- Вычислите сумму: $7 + 77 + 777 + 7777 + \dots + \underbrace{7\dots777}_{k \text{ семёрок}}$
- Функция f определена для всех пар натуральных чисел (k, n) таких, что $k < n$:

$$f(k, n) = k^2 + k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1)^2 + (k+1) \cdot (k+2) + 2 \cdot (k+2)^2 + (k+2) \cdot (k+3) + 2 \cdot (k+3)^2 + \dots + 2 \cdot (n-3)^2 + (n-3) \cdot (n-2) + 2 \cdot (n-2)^2 + (n-2) \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-1)^2 + (n-1) \cdot n + n^2$$
 - вычислите: $\frac{f(2n, 5n)}{n^3}$;
 - решите уравнение: $f(4, x) = 64$;
 - найдите все пары простых чисел (k, n) , что $f(k, n)$ является простым числом.