

## ПРИМЕР ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОНЯТИЯ

Возможно, за время обучения в школе у вас сложилось впечатление, что уж где-где, а в школьном учебнике вряд ли можно найти что-то такое, к чему стоило бы относиться с осторожностью.

В самом деле, если учитель даёт задание выучить какой-то материал, то вы его просто выучиваете, не обращая внимание, насколько он соответствует тому, что вы изучали раньше или даже насколько он согласуется с вашими собственными представлениями о том, как этот материал связан с какими-то другими вещами. Но оказывается, что если мы возьмём разные учебники математики, алгебры или геометрии, даже одновременно использующиеся в настоящее время, то одни и те же понятия могут вводиться в них не просто по-разному, а зачастую противоречащим друг другу образом! И для того, чтобы их использовать грамотно, оказывается необходимо вникать в тонкости формулировок, которые приводятся в учебниках.

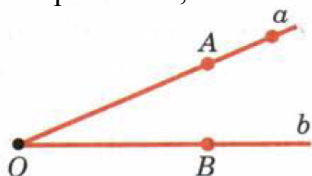
Для примера рассмотрим, казалось бы, хорошо знакомое всем нам понятие «угол». Попробуйте прежде чем читать дальше самостоятельно сформулировать, что такое угол и, например, записать ваше определение на листочке или в компьютере.

Записали?

А теперь давайте посмотрим, что имеее в виду под углом вы, и к какому из учебников окажется наиболее близким данное вами определение.

Для начала возьмём учебник А.В.Погорелова (*Геометрия. 7-9 классы.* – М.: Просвещение, 2014, с. 9). «**Углом** называется фигура, которая состоит из точки – **вершины угла** – и двух различных полупрямых, исходящих из этой точки, – **сторон угла**. На рисунке 14 вы видите угол с вершиной  $O$  и сторонами  $a$ ,  $b$ .»

А рисунок 14 такой:

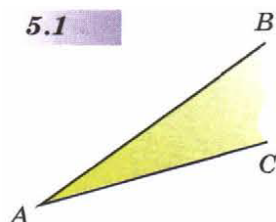


Вроде всё в целом неплохо, правда, зачем рядом с  $a$  нарисована точка? Но это ошибка редактора или художника, точно не автора.

Интересно, ваше определение соответствует этому?

Возьмём другой учебник: *Математика. Арифметика. Геометрия. 5 класс* / Е.А.Бунимович, Г.В.Дорофеев, С.Б.Суворова и др. – М.: Просвещение, 2014, с. 80. Как определяется угол здесь?

«Проведём на листе бумаги два луча  $AB$  и  $AC$  с общим началом в точке  $A$  (рис. 5.1). Мы получим **угол**. Лучи  $AB$  и  $AC$  называют **сторонами** угла, точку  $A$  – его **вершиной**. Сам угол обозначают так:  $\angle BAC$  (или  $\angle CAB$ ). Этот же угол можно обозначить и короче, по его вершине:  $\angle A$ .»



И рисунок 5.1 рядышком:

Давайте зададим себе вопрос: новый «угол» – это то же самое, что предыдущий, или что-то другое? Есть ли разница между фразами «угол... состоит из» и просто «получим угол». Оказывается есть. И огромная! В первом случае мы чётко понимаем, что всё относящееся к углу у нас перечислено (точка и две полупрямые). А во втором? А во втором нам только говорят, что после того, как мы что-то нарисовали, на рисунке появился «угол». Правда, вроде у него есть стороны и вершина. Но вдруг кроме них есть и что-то ещё?

Более того, обратите внимание, в отличие от предыдущего рисунка тут что-то закрашено жёлтеньким. Может быть, и это тоже относится к углу? То, что жёлтенькое.

В общем, такой текст совместно с рисунком скорее запутывает, чем поясняет, и что именно имеют в виду авторы под «углом» не очень понятно.

Заглянем ещё в какой-нибудь учебник? Пожалуйста: *Геометрия. 7 класс / А.Д.Александров, А.Л.Вернер, В.И.Рыжик, Т.Г.Ходот. – М.: Просвещение, 2013, с. 53.*

Тут авторы поначалу себя не утруждают аккуратной формулировкой определения, пишут просто: «Если на плоскости из некоторой точки провести два луча, то они разобьют плоскость на две части – два угла.»

И свой рисуночек приводят:

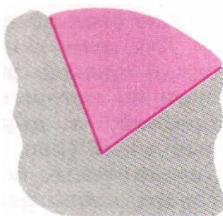


Рис. 88

Вот как! Оказывается, угол – это не «точка и две полупрямые», а часть плоскости!

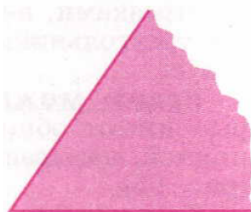
Не на это ли намекали авторы второго учебника, закрашивая часть плоскости жёлтеньким? Но если так, то это уж точно противоречит определению угла, данному автором первого учебника.

Кроме того, здесь возникает другая проблема. Если по мнению авторов третьего учебника обе получившиеся части плоскости являются углами, то как быть с границей данных частей? В какую из частей она будет включена? И в одну, и в другую она включена быть не может, потому что в процитированной фразе ясно сказано, что плоскость *разбита* на 2 части, т.е. то, что есть в одной части, не может быть в другой. А тогда углом является и часть плоскости с границей (или её частью), и часть плоскости без границы? Но ведь это получаются очень разные объекты!

Тем временем авторы продолжают:

«**Углом** мы будем называть часть плоскости, ограниченную двумя лучами с общим началом. Эти лучи называются **сторонами угла**, а их общее начало – **вершиной угла**. Стороны угла принадлежат углу. О точках угла, не лежащих на его сторонах, говорят, что они лежат **внутри угла**, или являются **внутренними**.»

Новый рисунок такой:



Хорошо, пусть так. Правда, теперь это противоречит тому, что говорилось парой абзацев выше про разбиение плоскости, но это уже мелочи :)

И это ещё не всё. Следующий учебник: *Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7-9 кл.– М.: Просвещение, 2012, с. 46.*

«**Углом** мы будем называть часть плоскости, заключённую между двумя лучами этой плоскости, имеющими общее начало. Точки, лежащие в этой части плоскости, будем называть **внутренними** точками угла.»

Если бы это было всё, тогда мы с полным правом могли бы и этот вариант отнести к некорректным, но автор добавляет:

«Данное определение угла не указывает, какую из двух частей плоскости, образовавшихся при проведении на плоскости двух лучей с общим началом, следует отнести к самому углу, а какую нет.

Договоримся, что обычно мы будем относить к углу «меньшую» из двух образовавшихся частей.»

Эх, сказал бы автор вместо последнего предложения, что можно брать любую – было бы замечательно, а так – какая-то «меньшая». Хорошо хоть в кавычках :)

В заключение – последний, пятый учебник (*Геометрия. 7-9 классы / И.М.Смирнова, В.А.Смирнов.– М.: Просвещение, 2007, с. 21-22*), по-видимому, даёт самый короткий и точный вариант определения угла как части плоскости:

«Фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами, называется **углом**.»

Какой же вывод? Из пяти рассмотренных нами учебников в одном вообще не понятно, что имеется в виду под углом, а оставшиеся четыре дают **три разных определения угла!**

По первому учебнику угол – это сами лучи с вершиной, по третьему и пятому – часть плоскости вместе с границами, по четвёртому – часть плоскости без границ. И важно понимать, что каждое из этих трёх представлений **противоречит** двум другим.

Может возникнуть вопрос: какое из них правильное? На самом деле любое (потому что определение чего-либо можно давать произвольным образом), но только два остальных при этом будут неправильными :)

А это означает, что задачи, содержащие понятие угла, могут иметь разные, взаимоисключающие решения в зависимости от того, какое именно определение мы имеем в виду, решая конкретную задачу.

Например, фрагмент следующей задачи из нашего вступительного экзамена как раз связан с различными представлениями о том, что является углом:

«Что такое угол? На плоскости нарисованы угол и окружность, центр которой находится в вершине угла. Будет ли иметь площадь часть угла, не выходящая за пределы окружности?» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ осеннего набора 2017 года, 8 класс).

Наверное, почти любое понятие из обычного школьного учебника может привести нас к описанной ситуации. И разобравшись с ней, возможно, мы не только узнаем больше о конкретном понятии, но и начнём лучше понимать структуру, которую понятия образуют на самом деле в любой науке, а не только в математике.

В качестве примеров, с которых можно начать поиск понятия для подробного изучения, приведём ещё несколько задач из наших вступительных экзаменов, предполагающих ис-

пользование взаимоисключающих определений и, следовательно, взаимоисключающих решений.

«Какие прямые называются параллельными? Верно ли, что если каждая из двух прямых параллельна третьей, то эти две прямые также параллельны? Если нет, то как они могут располагаться друг относительно друга? Ответ обосновать.» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ осеннего набора 2015 года, 7 класс).

«Что такое треугольник? Может ли треугольник не иметь площади? Может ли треугольник иметь длину? Ответы обосновать.» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ зимнего набора 2017 года, 8 класс).

«Что такое сторона геометрической фигуры? Любая ли геометрическая фигура имеет стороны? Если нет, то при каких условиях геометрическая фигура будет иметь стороны. Может ли геометрическая фигура иметь только одну сторону? Ответы обосновать.» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ зимнего набора 2017 года, 10 класс).

**Желаем удачи и ждём ваших писем!**