РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРИДУМЫВАНИЮ ЗАДАЧ

Основное условие при выборе данной формы работы: задачи должны быть полностью или частично оригинальными, т.е. в предложенной формулировке не встречаться в каком-либо источнике (учебнике, задачнике, интернет-сайте и т.п.), а также интересными, по крайней мере, для их автора :)

При этом сами задачи могут рождаться как «из ничего», так и возникать из существующих задач путём изменения/дополнения их условий или переформулирования/добавления вопросов, принципиально изменяющих решение исходной задачи.

Обратите внимание, что задачи, отличающиеся от существующих только порядком слов/предложений или изменёнными числовыми данными оригинальными задачами **не считаются!**

Проиллюстрируем процесс возникновения новых задач на задачах из вступительных вариантов ФМШ.

1) Есть много задач, связанных с преобразованием «многоэтажных» выражений, например: «Представьте в виде рациональной дроби: $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ (248(в), Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / [Ю.Н.Макарычев и др.]; под ред. С.А.Теляковского.– М.: Просвещение, 2013.)

А если увеличить эту «многоэтажность», дополнительно организовав её в виде какой-то фигуры, или заменить её большим количеством скобок? Тогда могут получиться следующие несложные, но красиво выглядящие задачи:

– «Решите уравнение: $-\left(-\left(-\left(1+2x\right)+3x\right)+4x\right)=5x-\left(4x-\left(3x-2\right)\right)$.» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ весеннего набора 2016 года, 7 класс).

– «Упростите выражение: $4\cdot\dfrac{3\cdot\dfrac{2\cdot\dfrac{a}{a^2b}}{a^3b^2c}}{5\cdot\dfrac{a^4b^3c^2d}{6\cdot\dfrac{a^3b^2c}{7\cdot\dfrac{a^2b}{a}}}}$.» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ осеннего набора 2015 года, 9 класс);

– «Решите уравнение: $x=\dfrac{1}{2-\dfrac{3}{4-\dfrac{5}{6-\dfrac{7}{x}}}}$.» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ осеннего набора 2015 года, 11 класс).

2) Иногда при чтении математической литературы мы сталкиваемся с синонимами известных терминов, используя которые даже обычные задачи начинают звучать необычно, и не сразу можно догадаться, что на самом деле всё очень просто.

Например, для решения следующей задачи необходимо знать понятие «равновеликости», а также то, что правильный гексаэдр – это всего лишь правильный многогранник с шестью гранями, т.е. обычный куб:

«Предложите хотя бы одно разбиение правильного гексаэдра на 3 равновеликие части двумя параллельными плоскостями, не параллельными граням данного гексаэдра.» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ зимнего набора 2015 года, 11 класс).

3) Также при чтении различных математических книжек можно столкнуться с некоторыми новыми достаточно простыми понятиями, которые можно красиво проиллюстрировать графиком или чертежом. Если это понятие имеет короткое определение, то может родиться задача, в которой само понятие не упоминается, но задача получается красивой. Например, понятие целой части числа или антье может привести к такой задаче:

«Для каждого действительного числа будем обозначать с помощью $[x]$ наибольшее целое число, не превышающее x. Решите неравенство: $[2x] < -x^2$.» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ осеннего набора 2014 года, 10 класс).

4) При решении задач можно делать различные ошибки, и бывает полезно прорешать некоторое количество аналогичных задач, чтобы закрепить тот или иной метод или правило, с помощью которого решаются данные задачи. А придумать задачу, провоцирующую на совершение указанной ошибки будет ещё полезнее. Например, в наших вступительных вариантах была такая задача:

«Решите систему: $\begin{cases} x \le \dfrac{1}{x} \\ 2 \cdot \sin x \text{ является целым числом} \end{cases}$.» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ осеннего набора 2014 года, 11 класс).

Здесь первое неравенство неискушённый учащийся может начать решать, «домножив на x», чего, конечно, просто так сделать нельзя. В дополнение к этому второе условие системы смотрится довольно необычно, и требует немного нестандартного применения знаний о тригонометрических функциях.

5) Бывает, что при решении каких-то геометрических задач приходится выполнять построения, которые сами по себе кажутся красивыми либо приводят к красивым формулировкам, например:

«Чему равно отношение площади правильного шестиугольника к площади правильного треугольника, вписанного в окружность, которая вписана в квадрат, вписанный в окружность, которая вписана в исходный шестиугольник?» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ зимнего набора 2015 года, 10 класс).

Иногда дополнительно к этому можно привлечь какое-либо дополнительное понятие (в следующем примере – геометрическую прогрессию), «приправив» исходную задачу алгебраическими преобразованиями:

«В окружность радиусом $\sqrt{3}$ вписан правильный треугольник, в него вписана окружность, в эту окружность снова вписан правильный треугольник и т.д. Найдите сумму периметров всех треугольников.» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ зимнего набора 2014 года, 10 класс).

6) Есть известная задача, например, в такой формулировке: «Почему крышки канализационных люков делают круглыми, а не овальными или квадратными?» (Задачи по математике, предлагавшиеся ученикам математического класса 57 школы (выпуск 2000 года, класс «В») / под редакцией А. Шеня. М.: МЦНМО, 2000)

Изучив данный вопрос подробнее, можно найти информацию о том, что на самом деле крышки люков существуют и других форм, в том числе, квадратные, прямоугольные, треугольные и т.п. В связи с этим исходный вопрос можно уточнить, добавив оборот «как правило», а также сосредоточить внимание на выделение основного свойства, из-за которого крышки в основном круглые. При этом можно попытаться сформулировать новую задачу, в которой предложить скомпенсировать отсутствие данного свойства для крышки люка другой формы изменением конфигурации люка. В результате может получиться такая новая задача:

«Почему крышки канализационных люков, как правило, делают круглыми? Если бы, тем не менее, вам поставили задачу спроектировать крышку в форме правильного треугольника вместо круглой, то какие требования к новой конструкции люка вы предъявили?» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ весеннего набора 2016 года, 9-11 классы).

7) Отдельный класс оригинальных задач связан с обращением внимания решающего на какие-либо тонкости или умолчания, которые используются при формулировке тех или иных утверждений. В этом случае могут родиться, например, такие задачи:

– «Какие прямые называются параллельными? Верно ли, что если каждая из двух прямых параллельна третьей, то эти две прямые также параллельны? Если нет, то как они могут располагаться друг относительно друга? Ответ обосновать.» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ осеннего набора 2015 года, 7 класс).

Здесь утверждение «если каждая из двух прямых параллельна третьей, то эти две прямые также параллельны» неверно, т.к. не оговорено, что исходные прямые не могут совпадать.
Но если вдруг вы считаете совпадающие прямые параллельными (т.е. это вытекает из вашего определения параллельных прямых), то утверждение окажется верным.

– «Дайте определение медианы треугольника. Верно ли, что если медиана треугольника совпадает с высотой, то она также совпадает с биссектрисой? Может ли ответ на предыдущий вопрос зависеть от дополнительных условий?» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ осеннего набора 2015 года, 8 класс).

Конечно, если медиана треугольника совпадает с высотой, то треугольник получается равнобедренный, но вот с биссектрисой эти медиана и высота могут не совпадать, если биссектриса проведена из другой вершины.

8) Те, кто читает математическую литературу на других языках, могут столкнуться с тем, что некоторые понятия определяются в ней несколько иначе, чем мы привыкли. И это тоже может стать источником новых задач. Например:

«В одном из учебников (R. Beals. Advanced Mathematical Analysis. Springer-Verlag New York Inc., 1973, p. 69) приводится следующее определение: «The function u is said to be *periodic* with *period* $a \neq 0$ if $u(x+a)=u(x)$ for each $x \in \mathbb{R}$». Согласны ли вы ним? Если нет, то как бы вы его скорректировали?» (Вступительный вариант в ФМШ МИЭМ зимнего набора 2015 года, 11 класс).

Из приведённого определения следует, что периодическая функция должна быть определена на всём множестве действительных чисел, что, вообще говоря, не обязательно.

Помимо рассмотренных случаев, новые задачи часто возникают, если при решении некоторой задачи вы вдруг обнаруживаете интересные алгебраические соотношения, или при выполнении геометрических построений вы что-то строите не туда, и в результате получаются красивые картинки, которые могут стать основой для новых, иногда совсем неожиданных задач. Интересные математические идеи могут возникнуть и при чтении художественной литературы.

Если придуманная вами задача не возникла «из ничего», а появилась в результате изучения тех или иных источников информации, будет очень здорово, если получится восстановить ход ваших мыслей, начиная от самого первого момента, возможно, очень далёкого от результата, к которому вы пришли, но, тем не менее, оттолкнувшись от которого вам удалось придумать что-то интересное.

Желаем удачи и ждём ваших писем!