

Вариант ФМШ2016-II-10-1

1. Решите уравнение: $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$
2. На координатной плоскости изобразите множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству:

$$y + |y + 1| < x \cdot |y + 1|$$

3. Дан треугольник AB_1B_2 . На прямой B_1B_2 отмечена точка B_3 так, что $|B_2B_3| = |B_1B_2| + 1$. Затем на этой же прямой отмечена точка B_4 так, что $|B_3B_4| = |B_2B_3| + 1$, точка B_5 , что $|B_4B_5| = |B_3B_4| + 1$ и т.д. Найдите сумму площадей треугольников

$$AB_3B_4, AB_5B_6, AB_7B_8, AB_9B_{10}, \dots, AB_{97}B_{98},$$

если известны площади треугольников AB_1B_2 и $AB_{99}B_{100}$. Единственное ли решение имеет данная задача? Ответ обоснуйте.

4. Чайка A взлетает с Земли с постоянной скоростью под углом к горизонту к вершине столба. Чайка B , находящаяся у подножия того же столба, взлетает с Земли одновременно с ней также под углом к горизонту и по направлению к траектории движения чайки A с постоянной скоростью, в 2 раза меньшей скорости чайки A . Найдите синусы углов, под которыми взлетели чайки A и B , если птицы столкнулись под прямым углом. Может ли чайка B взлетать под другим углом, чтобы произошло столкновение? Если да, то сколько существует таких углов? (На основе задачи Вячеслава Лукьянчука, 10 класс, г. Пермь.)
5. Что такое описанная окружность? Чему может быть равно отношение периметра фигуры, около которой описана окружность, к длине самой окружности? Ответ обоснуйте.
6. Решите уравнение: $4 \cdot \sqrt[3]{(x+23)^2} + \sqrt[3]{(23-x)^2} - 5 \cdot \sqrt[3]{23^2 - x^2} = 0$
7. Сколько существует различных значений a , при которых уравнение

$$\frac{(ax^2 + (ax)^2 + a^2x) \cdot \left(\frac{x^2}{a} + \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{x}{a^2} \right) \cdot a}{x} = \left(16 + \frac{a}{x} \right) \cdot x^2$$

имеет целочисленное решение? (На основе задачи Данила Ермохина, 8 класс, г. Кимовск, Тульская обл.)

Вариант ФМШ2016-II-10-2

1. Решите уравнение: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$
2. На координатной плоскости изобразите множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству:

$$y - |y - 1| > |y - 1| \cdot x$$

3. Дан треугольник AB_1B_2 . На прямой B_1B_2 отмечена точка B_3 так, что $|B_2B_3| = |B_1B_2| + 1$. Затем на этой же прямой отмечена точка B_4 так, что $|B_3B_4| = |B_2B_3| + 1$, точка B_5 , что $|B_4B_5| = |B_3B_4| + 1$ и т.д. Найдите сумму площадей треугольников

$$AB_2B_3, AB_4B_5, AB_6B_7, AB_8B_9, \dots, AB_{98}B_{99},$$

если известны площади треугольников AB_1B_2 и $AB_{99}B_{100}$. Единственное ли решение имеет данная задача? Ответ обоснуйте.

4. Чайка A взлетает с Земли с постоянной скоростью под углом к горизонту к вершине столба. Чайка B , находящаяся у подножия того же столба, взлетает с Земли одновременно с ней также под углом к горизонту и по направлению к траектории движения чайки A с постоянной скоростью, в 3 раза меньшей скорости чайки A . Найдите синусы углов, под которыми взлетели чайки A и B , если птицы столкнулись под прямым углом. Может ли чайка B взлетать под другим углом, чтобы произошло столкновение? Если да, то сколько существует таких углов? (На основе задачи Вячеслава Лукьянчука, 10 класс, г. Пермь.)
5. Что такое вписанная окружность? Чему может быть равно отношение площади фигуры, в которую вписана окружность, к площади круга, ограниченного данной окружностью? Ответ обоснуйте.
6. Решите уравнение: $\sqrt[3]{(37+x)^2} + 4 \cdot \sqrt[3]{(x-37)^2} - 5 \cdot \sqrt[3]{37^2 - x^2} = 0$
7. Сколько существует различных значений a , при которых уравнение

$$\frac{(ax^2 + (ax)^2 + a^2x) \cdot \left(\frac{x^2}{a} + \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{x}{a^2} \right) \cdot a}{x} = \left(20 + \frac{a}{x} \right) \cdot x^2$$

имеет целочисленное решение? (На основе задачи Данила Ермохина, 8 класс, г. Кимовск, Тульская обл.)