ФМШ 200510-II-1

1. Упростить выражение: $\left(a:\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b(b-3a)}{a^2-b^2}\right)\cdot\left(\dfrac{2a}{a-b}-1\right)$.

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases}x^2-4x+3=0\\x^3-2x^2+1=0\end{cases}$.

3. Хорды AB и BC окружности перпендикулярны. Найти длину дуги AC, содержащей точку B, если $AB = 3$, $BC = 4$.

4. Решить неравенство: $\left(x^2+10x+25\right)\cdot(x-7)\geq 0$.

5. Из пункта A в пункт B выехал автомобилист с постоянной скоростью 80 *км/ч*. Через 20 минут после этого из пункта B в пункт A выехал мотоциклист с постоянной скоростью 60 *км/ч*. На сколько позже приехал мотоциклист в пункт A, чем автомобилист в пункт B, если они встретились через 2 часа после выезда автомобиля? (Ответ записать в часах и минутах.)

6. Построить график функции $f(x)=\dfrac{(x-1)\cdot\left(x^2+x-2\right)}{x+2}$.

7. Сумма пяти членов геометрической прогрессии равна 44, а третий, второй и четвёртый её члены составляют, кроме того, арифметическую прогрессию. Найти геометрическую прогрессию.

8. В равнобедренный треугольник со сторонами 13, 13 и 24 вписан прямоугольник так, что одна из его сторон расположена на стороне основания, а две вершины – на боковых сторонах треугольника. Найти, какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник.

9. Построить множество точек плоскости xOy, удовлетворяющих системе неравенств: $\begin{cases}y\leq\dfrac{x-1}{x-2}\\|x-1|\leq 2\end{cases}$.

10. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $a=\dfrac{6x+1}{x^2+2x+5}$ имеет решение.

Решение варианта 1

Задача 1.

$$\left(a:\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b(b-3a)}{a^2-b^2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{a-b}-1\right)=\left(\frac{a\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)}{(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)}+\frac{b(b-3a)}{(a-b)\cdot(a+b)}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{a-b}\right)=$$

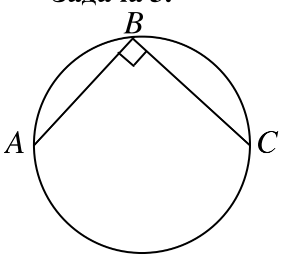
$$=\left(\frac{a\cdot(a+b)+b(b-3a)}{(a-b)\cdot(a+b)}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{a-b}\right)=\frac{a\cdot(a+b)+b(b-3a)}{(a-b)^2}=\frac{a^2-2ab+b^2}{(a-b)^2}=1.$$

Задача 2.

$$\begin{cases}x^2-4x+3=0\\x^3-2x^2+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)\cdot(x-1)=0\\(x-1)\cdot\left(x^2-x-1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)\cdot(x-1)=0\\(x-1)\cdot\left(x-\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)\cdot\left(x-\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)=0\end{cases}.$$

Ответ: $x\in\{1\}$.

Задача 3.



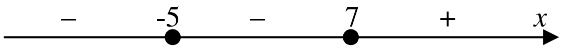
Угол $\angle ABC$ – вписанный, а, следовательно, он равен половине дуги, на которую опирается. Значит, т.к. $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$, то $\cup AC=180^\circ$. Это означает, что AC – диаметр данной окружности. Решая прямоугольный треугольник ABC, получаем $AC = 5$. Длина половины окружности есть $\cup AC=\dfrac{\pi d}{2}=\dfrac{5}{2}\pi$.

Ответ: $\cup AC=\dfrac{5}{2}\pi$.

Задача 4.

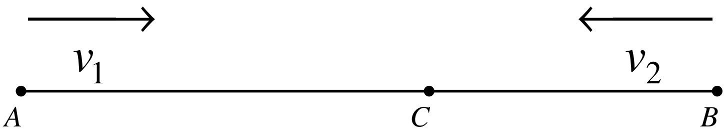
$$\left(x^2+10x+25\right)\cdot(x-7)\ge 0 \;\Leftrightarrow\; (x+5)^2\cdot(x-7)\ge 0.$$

Для решения данного неравенства применим метод интервалов:



Ответ: $x\in\{-5\}\cup[7;+\infty)$.

Задача 5.

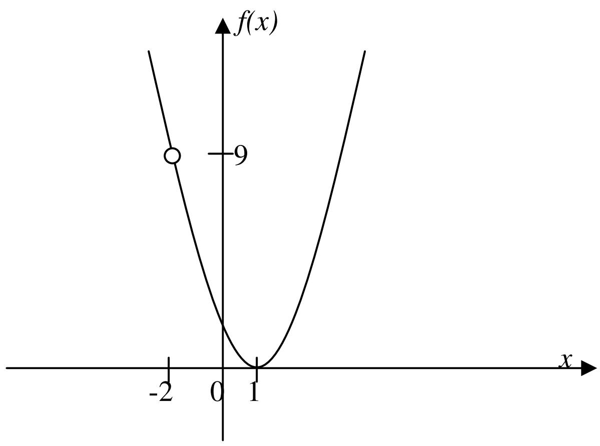


Пусть автомобилист и мотоциклист встретились в точке C, тогда расстояние от A до C равно $S_{AC}=2\cdot v_1=160\,км$, а от C до B – $S_{CB}=\left(2-\dfrac{1}{3}\right)\cdot v_2=100\,км$. Получаем расстояние между пунктами A и B: $S=S_{AC}+S_{CB}=260\,км$. Автомобилист пройдёт его за $t_1=\dfrac{S}{v_1}=\dfrac{13}{4}\,ч$, а мотоциклист – за $t_2=\dfrac{S}{v_2}=\dfrac{13}{3}\,ч$. Причём последний выехал на $20\,мин=\dfrac{1}{3}\,ч$ позже. Разница во времени составляет $\Delta t=\dfrac{14}{3}-\dfrac{13}{4}=\dfrac{17}{12}\,ч$.

Ответ: 1 *ч* 25 *мин*.

Задача 6.

$$f(x)=\frac{(x-1)\cdot\left(x^2+x-2\right)}{x+2}=\frac{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-1)}{x+2}=(x-1)^2,\,x\ne -2.$$



Задача 7.

Обозначим через $b_1, b_2, b_3, \ldots$ неизвестную геометрическую прогрессию. Тогда $b_3, b_2, b_4, \ldots$ – арифметическая прогрессия. По формулам для *n*-го члена арифметической $\left(a_n = a_1 + d(n-1)\right)$ и геометрической $\left(b_n = q^{n-1} \cdot b_1\right)$ прогрессий получаем: $a_2 = a_1 + d = b_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 + 2d = b_1 \cdot q^3$. Учитывая, что $a_1 = b_3 = b_1 \cdot q^2$, используя формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии $\left(S_n = b_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}\right)$, составим систему уравнений:

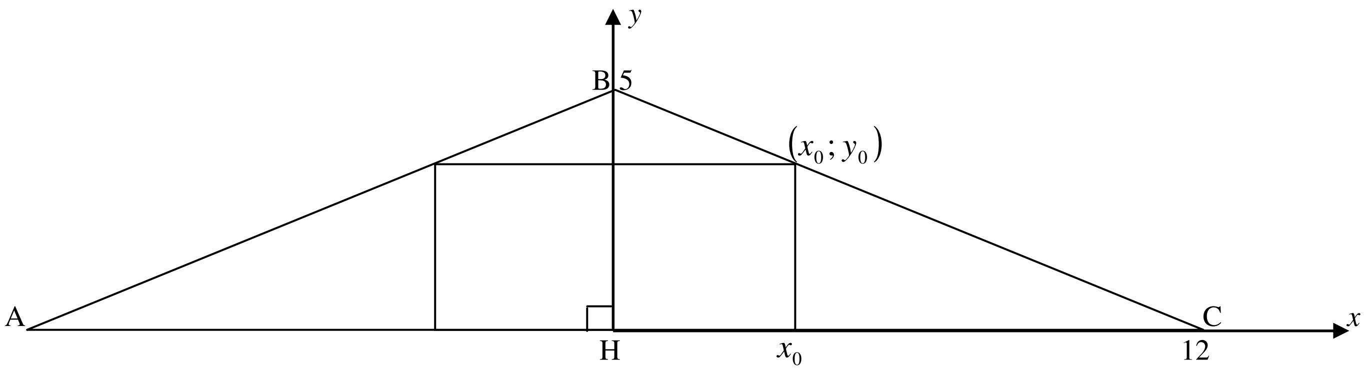
$$\begin{cases} b_1 \cdot q^2 + d = b_1 \cdot q \\ b_1 \cdot \dfrac{1-q^5}{1-q} = 44 \\ b_1 \cdot q^2 + 2d = b_1 \cdot q^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = b_1 \cdot q - b_1 \cdot q^2 \\ b_1 \cdot \dfrac{1-q^5}{1-q} = 44 \\ b_1 \cdot q \cdot \left(q^2 + q - 2\right) = 0 \end{cases}.$$

При $b_1 = 0$ все члены геометрической прогрессии равны нулю, следовательно, сумма не может равняться 44. При $q = 0$ получаем $b_1 = 44$, а арифметическая прогрессия обнуляется $(a_1 = 0, d = 0)$, что не противоречит условию задачи. И последний случай: $q^2 + q - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 1 \\ b_1 = \dfrac{44}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} q = -2 \\ b_1 = 4 \end{cases} \end{array}\right.$.

Следовательно, существуют три подходящие геометрические прогрессии.

Ответ: $(b_1; q) \in \left\{(44;0); \left(\dfrac{44}{5};1\right); (-4;-2)\right\}$.

Задача 8.



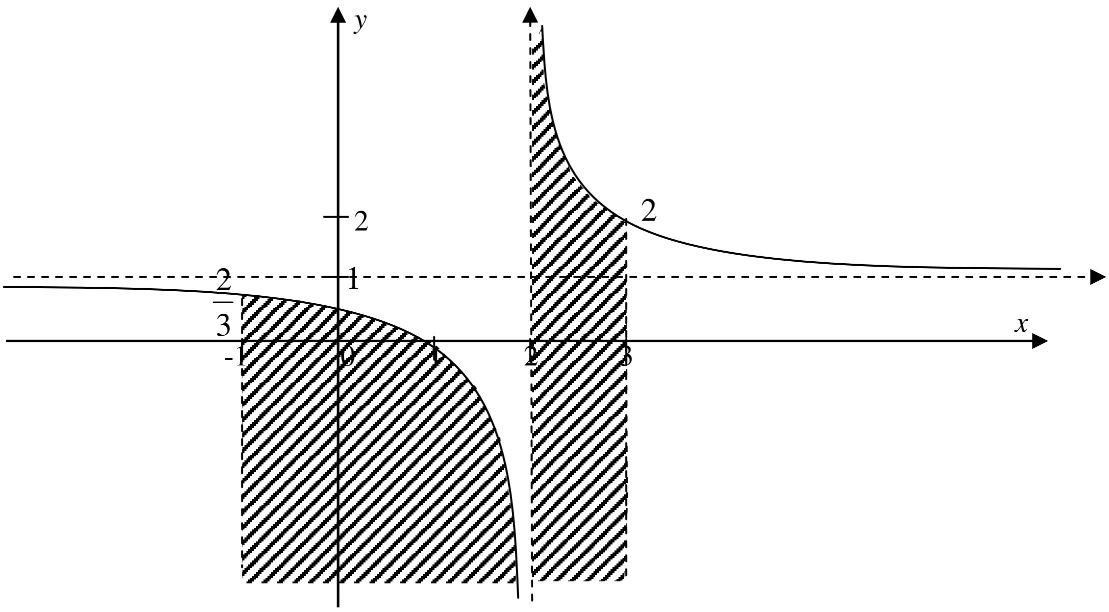
Обозначим вершины треугольника *A*,*B*,*C*. Тогда $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Высота *BH* треугольника *ABC* по свойствам равнобедренного треугольника является в то же время и медианой, т.е. $AH = HC = 12$. Следовательно, по теореме Пифагора получаем $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 5$. Введём систему координат так, как это показано на рисунке. Уравнение прямой *BC* имеет вид $y = 5 - \dfrac{5}{12}x$. Получаем функцию площади искомого прямоугольника: $S(x_0) = 2x_0 \cdot y_0 = 2x_0 \cdot \left(5 - \dfrac{5}{12}x_0\right) = 10x_0 - \dfrac{5}{6}x_0^2$. Исследуем эту функцию на экстремум: $S'(x_0) = 10 - \dfrac{5}{3}x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 6$. Получаем $\max\limits_{[0;12]} S(x_0) = S(6) = 30$.

Ответ: $S_{\max} = 30$.

Задача 9.

$$\begin{cases} y \le \dfrac{x-1}{x-2} \\ |x-1| \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le \dfrac{x-1}{x-2} \\ -1 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le \dfrac{x-2}{x-2} + \dfrac{1}{x-2} \\ -1 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 1 + \dfrac{1}{x-2} \\ -1 \le x \le 3 \end{cases}.$$

Функция $y = 1 + \dfrac{1}{x-2}$ представляет собой гиперболу $y = \dfrac{1}{x}$, сдвинутую на 2 единицы вправо и на 1 вверх. Значения функции на границах заданной области $(-1 \le x \le 3)$ равны $\dfrac{2}{3}$ и 2.



Задача 10.

Данная задача сводится к нахождению множества значений функции $f(x) = \dfrac{6x+1}{x^2+2x+5}$. Так как квадратный трёхчлен в знаменателе не имеет корней, то значение знаменателя всегда строго больше нуля, следовательно, функция определена при $x \in R$, и для вычисления экстремумов достаточно найти нули производной:

$$f'(x) = \frac{6 \cdot (x^2+2x+5) - (2x+2) \cdot (6x+1)}{\left(x^2+2x+5\right)^2} = \frac{-6x^2 - 2x + 28}{\left(x^2+2x+5\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{7}{3}. \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Графиком функции в числителе производной является парабола, ветви которой направлены вниз. Это означает, что $x = -\dfrac{7}{3}$ – точка минимума функции *f(x)*, а $x = 2$ – точка максимума. Значения *f(x)* в этих точках равны $-\dfrac{9}{4}$ и 1 соответственно.

Ответ: $a \in \left[-\dfrac{9}{4}; 1\right]$.

ФМШ 200510-II-2

1. Упростить выражение: $\left(b:\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}-\dfrac{a\cdot(a+3b)}{a^2-b^2}\right)\cdot\left(\dfrac{2b}{a+b}-1\right)$.
2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2-2x-3=0 \\ x^3-x^2+2=0 \end{cases}$.
3. Хорды AB и BC окружности перпендикулярны. Найти длину дуги AC, не содержащей точку B, если $AB=5$, $BC=12$.
4. Решить неравенство: $(x^2-6x+9)\cdot(x+5)\le 0$.
5. Из пункта A в пункт B по озеру вышел теплоход с постоянной скоростью 40 *км/ч*. Через 15 минут после этого из пункта B в пункт A вышел катер с постоянной скоростью 30 *км/ч*. На сколько позже пришёл катер в пункт A, чем теплоход в пункт B, если они встретились через 3 часа после выхода катера? (Ответ записать в часах и минутах.)
6. Построить график функции $f(x)=\dfrac{(x+1)\cdot(x^2-x-2)}{x-2}$.
7. Сумма семи членов геометрической прогрессии равна 129, а четвёртый, третий и пятый её члены составляют, кроме того, арифметическую прогрессию. Найти геометрическую прогрессию.
8. В равнобедренный треугольник со сторонами 5, 5 и 8 вписан прямоугольник так, что одна из его сторон расположена на стороне основания, а две вершины – на боковых сторонах треугольника. Найти, какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник.
9. Построить множество точек плоскости xOy, удовлетворяющих системе неравенств: $\begin{cases} y\ge\dfrac{x+3}{x+2} \\ |x+1|\le 2 \end{cases}$.
10. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $a=\dfrac{4x+11}{x^2+4x+5}$ имеет решение.

ФМШ 200510-II-3

1. Решить уравнение: $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}+\dfrac{x^3+64}{x^2+5x+4}=8$.
2. Найти все решения неравенства $\dfrac{4}{x-3}\ge -2$ на интервале $x\in(-8;20]$.
3. Построить график функции $y^2+5y-x+6=0$.
4. Найти площадь треугольника ABC, если его вершины имеют координаты: $A(-1;-3)$, $B(2;-1)$ и $C(-2;5)$.
5. Двигаясь на катере путешественник должен преодолеть 184 *км*. Сколько дней продлится путешествие, если в последний день будет преодолено 16 *км*, а в каждый предыдущий день на 2 *км* больше?
6. Два автобуса выехали одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу с постоянными скоростями 60 *км/ч* и 40 *км/ч* соответственно. Найти расстояние между пунктами A и B, если через 45 минут после выезда расстояние между автобусами составило 10 километров.
7. Решить систему неравенств: $\begin{cases} |x-4|+|8-x|-|x+7|\ge -1 \\ x^2<9 \end{cases}$.
8. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность радиуса 4, причём её центр O лежит на отрезке BD. Найти площадь четырёхугольника, если $OB=5$, $CB=7$.
9. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{x^2-ax-3x+2a+2}{x+2}=0$ имеет единственный корень.
10. Построить множество точек плоскости xOy, удовлетворяющих хотя бы одному уравнению, неравенству или системе уравнений и неравенств: $x^2+y^2+2x+4y-4=0$, $x^2+y^2+2x-6y+6=0$,

$x^2+y^2+2x-12y+36=0$, $x^2+y^2+4x-6y+24=0$, $x^2+y^2-4x-6y+12=0$, $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{13}{2}\right)^2\le 0$,

$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{13}{2}\right)^2\le 0$, $\begin{cases} y=6 \\ -\dfrac{5}{2}\le x\le -1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=\dfrac{11}{2} \\ -\dfrac{3}{2}\le x\le -\dfrac{1}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} -2\le x\le 0 \\ 7\le y\le 9 \end{cases}$.